

# De Bell-ongelijkheid

In 1964 publiceerde Bell een beroemd geworden artikel, met daarin een ongelijkheid die gebruikt kan worden om te testen of quantummechanische verschijnselen aan de eisen van *lokaliteit* en *realisme* voldoen. Twintig jaar later, begin jaren tachtig, werd deze ongelijkheid experimenteel getest met fotonen.

Nu, weer ruim twintig jaar later en geïnspireerd door experimentele ontwikkelingen in de vaste-stofnanofysica, komt een analoge test met elektronen in beeld. Miriam Blaauboer

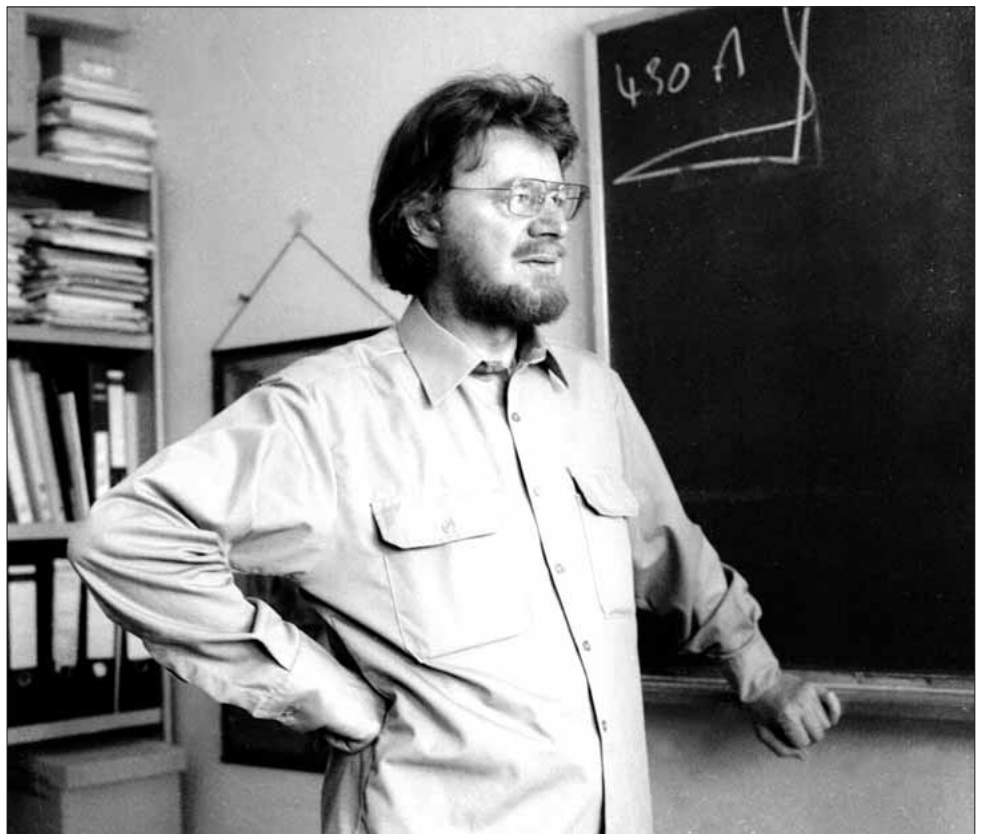
Eén van de bekendste wetenswaardigheden over Einstein als fysicus is dat hij tot het einde van zijn leven de quantummechanica als fundamentele theorie onbevredigend vond [1]. Naar zijn mening bestond de echte wereld uit "systemen" (deeltjes, velden) die objectieve eigenschappen bezitten, dat wil zeggen eigenschappen die niet afhankelijk zijn van metingen door externe waarnemers. Een tweede essentieel aspect van deze objectieve eigenschappen is dat het resultaat van een meting van een eigenschap op plaats A niet af kan hangen van een gebeurtenis op plaats B, indien B ver genoeg van A verwijderd is dat informatie over de gebeurtenis op B reizend met de lichtsnelheid plaats A pas kan bereiken nadat de meting daar al heeft plaatsgevonden. Theorieën die aan deze beide eisen voldoen worden *realistisch*

M.Blaauboer@tmw.tudelft.nl



Miriam Blaauboer studeerde natuurkunde en wis- kunde aan de Universiteit Leiden en promoveerde in 1998 in de theoretische natuurkunde aan de VU in Amsterdam. Daarna was zij als postdoc werkzaam in het Weizmann In-

stituut in Israel en op Harvard. In 2001 kwam zij naar de TU Delft waar zij sinds vorig jaar als Vidi-onderzoeker theoretisch onderzoek doet naar de quantumdynamica van individuele elektronen in nanostructu- ren.



John Bell. [foto: CERN]

# testen met elektronen

en lokaal genoemd. De quantummechanica, in tegenstelling tot eerder ontwikkelde klassieke theorieën, voldoet aan geen van beide eisen: eigenschappen van een quantummechanisch systeem hangen af van de experimentele omstandigheden waaronder ze gemeten worden en een gebeurtenis op plaats B kan de uitkomst van een meting op plaats A instantaan beïnvloeden via het mechanisme van verstrengeling. Einstein vond de quantummechanica als zodanig weliswaar wiskundig consistent, maar hield vast aan het idee dat het desondanks een lokaal realistische theorie zou moeten zijn. Op grond daarvan kwam hij tot de conclusie dat de huidige quantummechanica niet compleet is, maar slechts een onvolledige versie is van een onderliggend theoretisch kader waarmee wel een objectieve beschrijving van quantummechanische verschijnselen mogelijk zou zijn. In 1935 schreef hij samen met Boris Podolsky en Nathan Rosen een artikel waarin zij deze mening uiteenzetten en concludeerden dat de notie van objectieve eigenschappen incompatibel is met de aanname dat de quantummechanica een volledige theorie is [2]. Het daaropvolgende debat over de vraag of de quantummechanica gemodificeerd kan worden tot een lokaal realistische theorie kreeg een interessante wending in 1964, een kleine tien jaar na Einsteins dood. In dat jaar publiceerde John Bell een kwantitatief criterium, dat nu bekend staat als de Bell-ongelijkheid, waaraan iedere lokaal realistische theorie moet voldoen (zie het kader 'De Bell-ongelijkheid'). Daarmee opende hij de weg naar een experimentele test die uit kan wijzen of de quantummechanica volledig is of niet.

## BELL-TEST MET FOTONEN

De eerste experimentele testen van de Bell-ongelijkheid werden in de jaren zeventig gedaan met paren fotonen in

## De Bell-ongelijkheid

Er bestaan verschillende formuleringen van de Bell-ongelijkheid. Wij zullen hier die van Clauser, Horne, Shimony en Holt [3] geven die in het experiment met fotonen van Aspect gebruikt is en waarop ook de voorstellen voor een Bell-test met elektronen gebaseerd zijn.

Beschouw een bron die paren gecorreleerde deeltjes – fotonen of deeltjes met spin  $\frac{1}{2}$  – uitzendt, zodanig dat het ene deeltje door een polarisator A en het andere door een polarisator B gaat, zie figuur 1. De polarisatoren meten de polarisatie (of spin) componenten van de deeltjes in een gekozen richting en hebben elk als mogelijke uitkomst + of -. Afhankelijk van deze uitkomst wordt deeltje 1 (2) vervolgens door detector A+ of A- (B+ of B-) geregistreerd. We bekijken hier de situatie waarin vier standen van de polarisatoren gebruikt worden, namelijk de twee standen  $\varphi_A$  en  $\varphi_{A'}$  voor polarisator A en de standen  $\varphi_B$  en  $\varphi_{B'}$  voor polarisator B. In een lokaal realistische beschrijving hebben beide deeltjes vaste intrinsieke waarden voor de polarisatie (of spin) in de vier standen. Ieder paar deeltjes kan dan symbolisch door de combinatie  $(\sigma_A \sigma_{A'} \sigma_B \sigma_{B'} ; \tau_A \tau_{A'} \tau_B \tau_{B'})$  voorgesteld worden, waarbij  $\sigma_X = \pm$  en  $\tau_X = \pm$  de uitkomsten van meting van de polarisatie van respectievelijk deeltje 1 en deeltje 2 in de richting  $\varphi_X$  zijn, enzovoort. Als we aannemen dat de deeltjes zich in de singlettoestand bevinden (voor andere verstrengelde toestanden kan een soortgelijke redenering als hieronder opgesteld worden), dan geldt dat  $\tau_X = -\sigma_X$ , voor  $X = A, A', B$  en  $B'$ . Ieder paar deeltjes wordt dus al volledig gekarakteriseerd door de combinatie  $(\sigma_A \sigma_{A'} \sigma_B \sigma_{B'})$ . Laat  $f(\sigma_A \sigma_{A'} \sigma_B \sigma_{B'})$  de fractie van het totale aantal door de bron geproduceerde paren zijn dat bij meting in de vier standen de uitkomst  $(\sigma_A \sigma_{A'} \sigma_B \sigma_{B'})$  oplevert. We bekijken nu de parameter  $S$ , die gedefinieerd is als

$$S \equiv |E(\varphi_A, \varphi_B) - E(\varphi_A, \varphi_{B'}) + E(\varphi_{A'}, \varphi_B) + E(\varphi_{A'}, \varphi_{B'})|, \quad (1)$$

waarbij

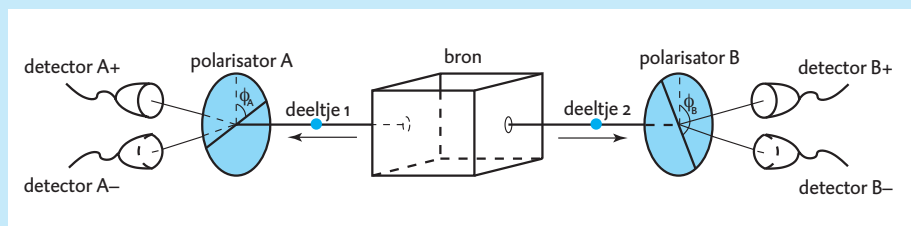
$$E(\varphi_A, \varphi_B) \equiv \sum_{\sigma_{A'}, \sigma_{B'}} [f(+, \sigma_{A'}, -, \sigma_{B'}) - f(+, \sigma_{A'}, +, \sigma_{B'}) - f(-, \sigma_{A'}, -, \sigma_{B'}) + f(-, \sigma_{A'}, +, \sigma_{B'})]. \quad (2)$$

Door (2) in (1) te substitueren en te gebruiken dat

$$\sum_{\sigma_A, \sigma_{A'}, \sigma_B, \sigma_{B'}} f(\sigma_A, \sigma_{A'}, \sigma_B, \sigma_{B'}) = 1$$

kan men direct laten zien dat  $S \leq 2$ .

Dit is de ongelijkheid van Bell.



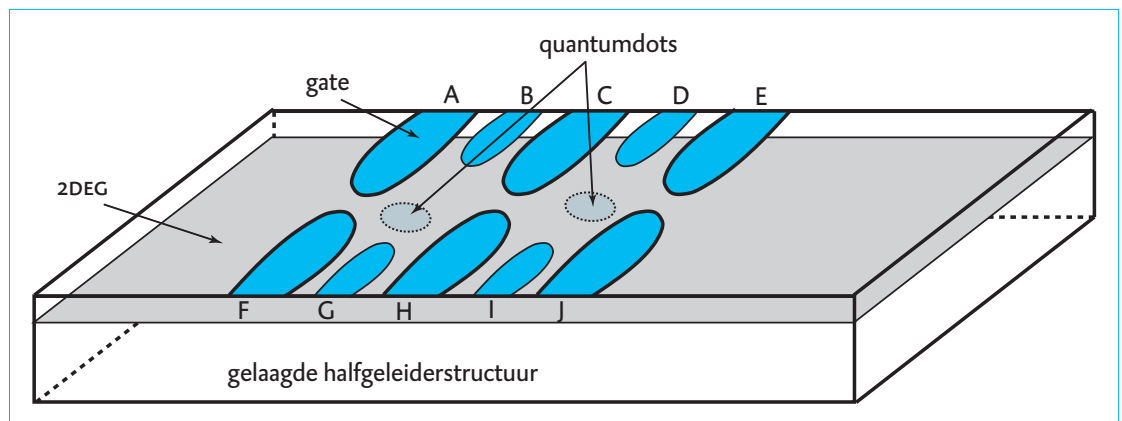
Figuur 1

Schematische voorstelling van een Bell-test: een bron produceert paren gecorreleerde deeltjes (bijvoorbeeld fotonen) die de bron elk in een andere richting verlaten. Deeltje 1 gaat door polarisator A die de polarisatie in richting  $\varphi_A$  meet en komt terecht in detector A+ of A-, en deeltje 2 gaat door polarisator B die de polarisatie in richting  $\varphi_B$  meet en wordt geregistreerd door detector B+ of B-.

een polarisatieverstrengelde toestand. Vrijwel allemaal leidden ze tot resultaten die de Bell-ongelijkheid schenden. In 1982 slaagden Alain Aspect en zijn collega's in Parijs er voor het eerst in om met een experimentele opstelling zoals schematisch in figuur 1 is weergegeven de Bell-ongelijkheid met vele standaardafwijkingen te schenden [4]. Ondanks het feit dat deze meetresultaten dus in duidelijke overeenstemming met de voorspellingen van de quantummechanica zijn, zijn er twee redenen waardoor ze een lokaal realistische beschrijving nog niet volledig uitsluiten. Deze staan bekend als de 'sluipgaten' (loopholes) van detectie en lokaliteit. De eerste heeft te maken met het technische probleem dat niet alle door de bron uitgezonden paren gedetecteerd worden, terwijl de Bell-ongelijkheid wel op die aanname gebaseerd is (zie het kader). In de experimenten betracht men daarom grote zorgvuldigheid om ervoor te zorgen dat de gedetecteerde paren een betrouwbare afspiegeling van alle paren zijn. Toch blijft het in principe denkbaar dat dit niet het geval is, en dat de resultaten wél aan de Bell-ongelijkheid voldoen als

essentieel is dat de metingen op A en B geheel onafhankelijk van elkaar zijn, en met name dat de polarisatoren op het laatste moment, als de deeltjes de bron al verlaten hebben, nog ingesteld kunnen worden. Alleen zo is het mogelijk om te testen of er instantane langeafstandsinvoel tussen de deeltjes is, die niet met de lichtsnelheid doorgegeven had kunnen worden. Inmiddels zijn er enkele Bell-testen gedaan waarbij de polarisatoren met behulp van random generators op tijdschalen die kort zijn vergeleken met de reistijd van de fotonen gedraaid werden [6]. Ook de resultaten daarvan schenden de Bell-ongelijkheid.

herentie van elektronen, dat wil zeggen de fase-eigenschappen van de quantumtoestand waarin ze zich bevinden, over afstanden van meer dan een paar micron te behouden [8]. Toch ziet het er naar uit dat dit in de nabije toekomst mogelijk wordt, dankzij experimentele ontwikkelingen in de vaste-stofnanofysica. Daar richt men zich momenteel onder andere op het coherent manipuleren van individuele elektronen in halfgeleidende nanostructuren. Recent zijn dan ook verschillende theoretische voorstellen gedaan voor Bell-testen in vaste-stofnanosystemen [9–11]. Deze zijn bijvoorbeeld gebaseerd op het idee om een



Figuur 2 Schematische illustratie van een dubbele quantumdot in een tweedimensionaal elektronengas (2DEG). Een 2DEG is een tweedimensionale laag in een halfgeleiderstructuur waarin elektronen zich vrij, dat wil zeggen zonder onderlinge interactie, en met behoud van hun fase-eigenschappen over lange afstanden (typisch een tiental  $\mu\text{m}$ ) kunnen bewegen. De dots ontstaan doordat een elektrische spanning die op metalen strips (de zogenaamde gates, hier A–J) bovenop de halfgeleiderstructuur aangelegd wordt de elektronen in het 2DEG onder de gates wegdukt, zodat er eilanden van elektronen in deze laag ontstaan die omringd zijn door potentiaal barrières gevormd door de gates.

310

echt alle deeltjes gedetecteerd zouden worden. Bells eigen oordeel over deze mogelijkheid luidde [5]: “Although there is an escape route there, it is hard for me to believe that quantum mechanics works so nicely for inefficient practical set-ups, and is yet going to fail badly when sufficient refinements are made. Of more importance, in my opinion, is the complete absence of the vital time factor in existing experiments”. Deze laatste zin verwijst naar de andere loophole: die van lokaliteit. Deze houdt in dat het voor een betrouwbare Bell-test

### BELL-TEST MET ELEKTRONEN?

Behalve testen met fotonen zijn er ook Bell-experimenten met verstrengelde paren protonen, kaonen, neutronen, koude atomen en met foton-atoomparen gedaan [7]. Elektronen zijn in dit rijtje van deeltjes en atomen prominent afwezig. De voornaamste redenen hiervoor zijn dat het door de sterke wisselwerking tussen elektronen in vaste stoffen moeilijk is om een bron van geïsoleerde verstrengelde elektronparen te maken en om de co-

supergeleider als bron van verstrengelde elektronparen te gebruiken [9] of gaan uit van een tweedimensionaal elektronengas (2DEG, zie figuur 2) waarbij met behulp van tunnelbarrières ruimtelijk-gescheiden verstrengelde elektron-elektron- of elektron-gatparen gecreëerd worden [10]. In deze schema's wordt voorgesteld om de Bell-ongelijkheid met ruismetingen, dat wil zeggen correlaties tussen de gemeten stroom in vier verschillende uit-

gangen, te testen. Dit is een verschil met de optische experimenten, waar de fotonen één voor één gedetecteerd worden en men op die manier de uitkomsten per paar direct telt. Elektronen zijn veel lastiger één voor één selectief (al naar gelang hun spinrichting) te tellen, maar recent is er een techniek ontwikkeld waarmee dit kan [12]. Daarmee komt nu een analoog experiment als dat van Aspect [4] voor elektronen in zicht. Het idee daarvoor [11] volgt het schema van figuur 1 en maakt gebruik van spinverstrengelde elektronen in quantumdots. Dit zijn geïsoleerde eilandjes van elektronen in een 2DEG-halfgeleiderstructuur, zie figuur 2. De experimentator kan de elektronen van buitenaf, via bestuurbare elektronische ‘sluizen’, één voor één een eiland opleiden of afsturen. Twee van die eilanden naast elkaar (een dubbele quantumdot) met twee elektronen erop vormen de bron van verstrengelde deeltjes in dit elektronische Aspect-schema. Om te beginnen staat de sluis tussen beide dots open en vormen de elektronen een spin-singlettoestand. Vervolgens wordt deze tussensluis gesloten en komt als gevolg van de afstotende Coulomb-wisselwerking het ene elektron op de ene dot en het andere op de andere dot terecht, terwijl de spinverstrengeling blijft bestaan. Wanneer nu de twee uitgangssluisen A–F en E–J (figuur 2) geopend worden, verlaten de elektronen de dots en komen ze via elektronische quantumkanaaltjes bij de ‘polarisatoren’. Deze polarisatoren bestaan elk ook uit quantumdots, waarin de beide elektronen gevangen komen te zitten. Een magneetveld op elk van beide dots zorgt er door middel van een elektron-spinresonantieproces voor dat de spin van het elektron op de dot gaat draaien. De tijd die het magneetveld aanstaat bepaalt de hoek waarover de spin draait. Tot slot wordt de spin van beide elektronen gemeten als zij na het openen van de uitgangssluisen van de dots

deze weer verlaten. Door dit experiment voor vele elektronparen te herhalen kan men de waarschijnlijkheid van ieder van de vier mogelijke uitkomsten (beide spins op, spin 1 op en spin 2 neer, enzovoort) bepalen en daarmee de Bell-ongelijkheid testen.

### LOOPHOLES

Hoe zit het nu met de loopholes in dit voorgestelde Bell-schema? Alleen door ieder elektronpaar te detecteren is het mogelijk de detectie-loophole te dichtten. Totdat er verfijndere detectoren beschikbaar komen, zijn we net als bij de fotonexperimenten aangewezen op de eerder genoemde aanname dat de gedetecteerde paren een representatieve afspiegeling van alle paren vormen. Een ernstiger bezwaar is dat de tijden die nodig zijn voor het draaien van de spins met de huidige technieken veel langer zijn dan de reistijden van de elektronen tussen de dubbele quantumdot (de bron) en de enkele quantumdots (de polarisatoren). Dit kan men niet – zoals bij fotonen wel mogelijk is – verhelpen door de afstand tussen deze dots te vergroten, omdat de reistijd van de elektronen dan zo lang wordt dat de kans op decoherentie van hun (verstrengelde) quantumtoestand zeer groot is. Snellere spinrotatietijden zouden de lokaliteits-loophole in dit voorgestelde elektronenexperiment wel kunnen elimineren [13]. Maar ook een experimentele realisatie zonder beide loopholes gedicht te hebben, zou al mooi zijn omdat die aan kan tonen dat de gedetecteerde paren verstrengeld waren – iets wat voor elektronen tot nu toe nog niet waargenomen is.

### REFERENTIES EN NOTEN

- 1 A. Pais, *Subtle is the Lord*, (Oxford University Press, 1982), hoofdstuk 25.
- 2 A. Einstein, B. Podolsky en N. Rosen, *Phys. Rev.* **47** (1935), 777; zie ook *NTvN* **71** (2005), 288.
- 3 J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony en R.A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969), 880; zie ook hoofdstuk 6.3 in F. Mandl, *Quantum*

*mechanics*, (Wiley Sussex, 1992), voor drie mogelijke standen van de polarisatoren.

- 4 A. Aspect et al., *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982), 91.
- 5 J.S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*, (Cambridge University Cambridge, 1987).
- 6 A. Zeilinger, *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999), S288, en referenties daarin.
- 7 D.L. Moehring et al., *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004), 090410, en referenties daarin.
- 8 Fotonen daarentegen blijven over afstanden van tientallen kilometers verstrengeld, zie bijvoorbeeld I. Marcikic et al., *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004), 180502.
- 9 N.M. Chtchelkatchev et al., *Phys. Rev. B* **66** (2002), 161320(R).
- 10 C.W.J. Beenakker et al., *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003), 147901; zie ook C.W.J. Beenakker, *NTvN* **70** (2004), 112; P. Samuelsson et al., *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003), 157002 en *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004), 026805.
- 11 M. Blaauboer en D.P. DiVincenzo, *Phys. Rev. Lett.* (2005), cond-mat/0502060.
- 12 R. Hanson et al., *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005), 196802.
- 13 Over het dichtten van de lokaliteits-loophole is ook bij de fotonexperimenten nog discussie mogelijk, daar in principe de beide random generatoren door gebeurtenissen in hun gemeenschappelijke verleden beïnvloed kunnen zijn, zie bijvoorbeeld [6].